

实验准备知识四 测量结果的不确定度

根据前面章节的内容，我们已经了解到误差是由测量值与被测量真值的差值进行表示，但在实际研究和实验中，真值往往是未知的，这也就导致误差是未知的。对于每一次测量，虽不能确定误差具体是多少，但可以根据测量数据和测量条件按一定的理论方法对测量可能的误差范围作出判断，这就需要利用到不确定度的相关知识。国际标准化组织（ISO）于 1992 年发布了具有指导性的文件《测量不确定度表示指南》，为世界各国不确定度评定的统一奠定了基础；随后，国际标准化组织和国际理论与应用物理联合会等七个国际权威组织又联合发布了修订版。从此，实验不确定度的评定有了国际公认的标准。

一、不确定度的概念

所谓不确定度是建立在误差理论基础上的一个概念，它表征被测量真值所处量值散布范围的评定，是从概率意义上对测量结果的不确定性做出评价。假如一个测量量的不确定度为 σ ，它表示所测物理量的真值以一定概率（置信概率）出现在置信区间 $[x - \sigma, x + \sigma]$ 内。不确定度小，标志着误差的可能值小，测量结果的可信赖程度高；不确定度大，标志着误差的可能值大，测量结果可信赖程度低。

二、不确定度的分类

由于不同的实验存在测量方法以及误差来源的差异，这也就使得不确定度具有不同的种类和不同的确定方法。虽然测量不确定度的来源有多个，但这些不同来源的不确定度在计算方法上只有两大类：一类是用统计方法计算的分量，体现偶然误差性质的不确定度称为 A 类不确定度；一类是用非统计方法评定的分量，体现系统误差性质的不确定度称为 B 类不确定度。

1. A 类不确定度的计算

假设对某一物理量进行多次测量，得到一个有限次测量列为： $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ ，此物理量测量值 x_i 不确定度的计算方法与多次测量计算偶然误差的方法相同：

$$u_A(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (1)$$

物理量测量值 x_i 的平均值 $\bar{x}$ 的不确定度表示为：

$$u_A(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (2)$$

例 在等精度下测量直径 d ，得到 10 次的测量值如下表，试表示 A 类不确定度。

次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d/mm	5.00	5.02	5.00	5.02	4.98	5.00	4.98	5.02	5.02	5.00

解：先计算直径 d 的算术平均值，得

$$\bar{d} = \frac{(5.00 \times 4 + 5.02 \times 4 + 4.98 \times 2)}{10} = 5.004 \text{ mm}$$

A 类不确定度：

$$u_A(\bar{d}) = \frac{s(d)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{4 \times (0.016)^2 + 4 \times (-0.004)^2 + 2 \times (0.024)^2}{10 \times (10-1)}} = 0.00499 \text{ mm}$$

2. B 类不确定度的计算

凡是不能用统计方法计算的不确定度都归为 B 类不确定度，B 类不确定度一般由产生系统误差的因素造成。完整准确地评定 B 类不确定度一般是一件复杂且需要实际经验的工作，要较好地评定 B 类不确定度，需要测量者对测量方法的理论依据、实验条件的局限及测量仪器的误差范围有充分的了解。对于学生物理实验，由于实验所使用测量仪器的精度对 B 类不确定度的影响具有许多共同特征，一般可以采用比较统一的方法来计算，即根据所使用仪器的最大允许误差来估算。设仪器的最大允许误差为 Δ ，且不确定度的该分量主要由测量仪器的误差特性所决定，则 B 类不确定度近似表示为：

$$u_B = \frac{\Delta}{C} \quad (3)$$

式中 C 为置信系数，其值与误差分布规律有关，误差分布满足正态分布， $C = 3$ ；若为均匀分布， $C = \sqrt{3}$ ；若为两点分布， $C = 1$ ；若为三角分布， $C = \sqrt{6}$ 。在实际实验中，通常把误差视为均匀分布，故 B 类不确定度表示为：

$$u_B = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \quad (4)$$

仪器的最大允许误差 Δ ，根据所使用的仪器不同而取不同的值，在常用的测量仪器中，仪器的最大允许误差通常在仪器出厂时会在说明书或者直接在仪器上标注，不用类别的仪器注明方式会有所不同，但大体上会有以下两种形式：

(a) 在仪器上直接给出仪器的误差，例如，标注 50 分度的游标卡尺，其仪器的误差为：
 $\pm 0.02 \text{ mm}$ ；

(b) 以准确度级别的形式给出，再根据表达式计算出误差，例如电流表、电压表的准确度

级别是这样规定的：

$$\text{级别}\% = (\text{电表的最大误差}/\text{满量程值}) \times 100\%$$

假设一块电压表的量程为 3000 mV ，级别为 0.1 级，那么电压表最大允许误差的大小应该表示为： $3000 \times 0.1\% = 3\text{ mV}$ 。

如果仪器未明确注明仪器误差的，一般取最小分度值（如：游标类仪器、数字仪表等）或最小分度值的一半（如：米尺、千分尺、读数显微镜等）作为仪器误差。

例 用准确度等级为 0.1 、量程为 15 V 的电压表测量电压，得到测量值为 12.56 V ，计算 B 类不确定度。

解：先计算电压表的最大允许误差：

$$\Delta = 15 \times 0.1\% = 0.015\text{ V}$$

根据式 (4)，B 类不确定度为：

$$u_B = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{0.015}{\sqrt{3}} = 0.009\text{ V}$$

三、不确定度的合成

若一个测量结果同时含有非统计性质（A 类不确定度）的不确定度分量和统计性质（B 类不确定度）的不确定度分量，当这些分量相互独立时，这一系列分量可以按分量平方和的二次方根来合成。假设某次测量 A 类不确定度的一系列分量为： $u_{a1}, u_{a2} \cdots u_{an}$ ；B 类不确定度的一系列分量为： $u_{b1}, u_{b2} \cdots u_{bn}$ 。

那么 A 类不确定度合成 u_A 应该表示为：

$$u_A = \sqrt{u_{a1}^2 + u_{a2}^2 + \cdots + u_{an}^2} \quad (5)$$

B 类不确定度合成 u_B 应该表示为：

$$u_B = \sqrt{u_{b1}^2 + u_{b2}^2 + \cdots + u_{bn}^2} \quad (6)$$

总不确定合成 U 应该表示为：

$$U = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \quad (7)$$

例 用 50 分度游标卡尺测量某器件的长度 l ，共测量 10 次，测量数据为： 10.04 mm ， 10.06 mm ， 10.02 mm ， 10.04 mm ， 10.04 mm ， 10.06 mm ， 10.08 mm ， 10.02 mm ， 10.00 mm ， 10.02 mm ，请表示此次测量的不确定度。

解：（1）A 类不确定的计算

$$\text{测量列的平均值：}\bar{l} = \frac{10.00 + 10.02 \times 3 + 10.04 \times 3 + 10.06 \times 2 + 10.08}{10} \approx 10.04\text{ mm}$$

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2}{n(n-1)}} \approx 0.01 \text{ mm}$$

(2) B类不确定度的计算

$$u_B = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{0.02}{\sqrt{3}} \approx 0.12 \text{ mm}$$

(3) 不确定度的合成

$$U = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{0.01^2 + 0.12^2} \approx 0.12 \text{ mm}$$

四、间接测量的不确定度传递公式

对于一个间接测量，其中直接测量量的误差必然会反映到间接测量量上，那么间接测量的不确定度与直接测量的不确定度之间必然满足一定关系，这种关系可用不确定度的传递公式来描述。设间接测量物理量 N 是相互独立的直接测量量 $x, y, z \dots$ 的函数，函数式表示为：

$$N = f(x, y, z \dots) \quad (8)$$

类比间接测量误差的传递，首先根据多元函数的微分方法对 (8) 式进行全微分：

$$dN = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots \quad (9)$$

再按每个直接测量量不确定度的加权方和根形式进行合成：

$$U_N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot u_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot u_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \cdot u_z\right)^2 + \dots} \quad (10)$$

上式中， U_N 为间接测量的不确定度， u_i ($i = x, y, z \dots$) 为各直接测量量的不确定度，

$\frac{\partial f}{\partial i}$ ($i = x, y, z \dots$) 称为传递系数。

当间接测量量的函数式为积商形式时，为使运算简便，一般可先求出间接测量的相对不确定度，再由定义式计算间接测量量的不确定度，间接测量量的相对不确定度 E_N 可表示为：

$$E_N = \frac{U_N}{N} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x} \cdot u_x\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial y} \cdot u_y\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial z} \cdot u_z\right)^2 + \dots} \quad (11)$$

$$U_N = \bar{N} \cdot E_N \quad (12)$$

这种求法与直接求 U_N 结果是一致的。根据式 (10) 和 (11) 可以得到一些常用函数的不确定度传递公式，下表列出：

表 1 常用函数的不确定度传递公式

函数形式	不确定度传递公式
$N = x + y$	$U_N = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$
$N = x - y$	$U_N = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$
$N = x \cdot y$	$U_N = \bar{N} \cdot \sqrt{\left(\frac{u_x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{u_y}{\bar{y}}\right)^2}$
$N = \frac{x}{y}$	$U_N = \bar{N} \cdot \sqrt{\left(\frac{u_x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{u_y}{\bar{y}}\right)^2}$
$N = \frac{x^k \cdot y^l}{z^m}$	$U_N = \bar{N} \cdot \sqrt{k^2 \left(\frac{u_x}{\bar{x}}\right)^2 + l^2 \left(\frac{u_y}{\bar{y}}\right)^2 + m^2 \left(\frac{u_z}{\bar{z}}\right)^2}$
$N = k \cdot x$	$U_N = k u_x$
$N = \sqrt[k]{x}$	$U_N = \bar{N} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{u_x}{\bar{x}}$
$N = \sin x$	$U_N = \cos \bar{x} \cdot u_x$
$N = \ln x$	$U_N = \frac{u_x}{\bar{x}}$

例 用单摆测量重力加速度的公式为： $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$ ，测得 $T = (2.000 \pm 0.002) \text{ s}$ ， $L = (100.00 \pm 0.01) \text{ cm}$ ，用不确定度评定测量结果。

解：（1）求解重力加速度的测量值：

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4 \times 3.1416^2 \times 100.00}{2.000^2} \approx 987.0 \text{ cm/s}^2$$

（2）计算间接测量量 g 的不确定度 U_g ，由于函数关系式是乘除形式，利用公式（11）先求得相对不确定度：

$$\begin{aligned} E_g = \frac{U_g}{g} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \ln g}{\partial L} \cdot u_L\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln g}{\partial T} \cdot u_T\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{L} \cdot u_L\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{1}{T} \cdot u_T\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{0.01}{100.00}\right)^2 + \left(2 \times \frac{0.002}{2.000}\right)^2} \approx 0.2\% \end{aligned}$$

$$U_g = g \times E_g = 987.0 \times 0.2\% = 1.974 \text{ cm/s}^2$$

（3）写出结果表达式：

$$g = (987.0 \pm 2.0) \text{ cm/s}^2$$

例 现需要测量某圆柱的体积 V ，以下是使用一级千分尺（出厂标定仪器最大允许误差为： 0.004 mm ）和 50 分度游标卡尺测得圆柱直径 D 和高度 H 的测量数据（高度 H 的测量为单次测量），试用不确定度评定测量结果并表示测量结果。

D/mm	8.004	8.002	8.006	8.000	8.006	8.004	8.000	8.003	8.004	8.004
H/mm	10.54									

解：（1）由于直径 D 为多次测量，先求其平均值：

$$\bar{D} = \frac{8.004 \times 4 + 8.002 + 8.006 \times 2 + 8.000 \times 2 + 8.003}{10} \approx 8.003 \text{ mm}$$

（2）分别求直接测量量直径 D 和高度 H 的不确定度：

$$\text{直径 } D \text{ 的 A 类不确定度: } u_{a1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (D_i - \bar{D})^2}{10 \times 9}} \approx 0.0007 \text{ mm}$$

$$\text{直径 } D \text{ 的 B 类不确定度: } u_{b1} = \frac{0.004}{\sqrt{3}} \approx 0.002 \text{ mm}$$

$$\text{高度 } H \text{ 的 B 类不确定度: } u_{b2} = \frac{0.02}{\sqrt{3}} \approx 0.01 \text{ mm}$$

$$\text{直径 } D \text{ 的总不确定度: } u_D = \sqrt{u_{a1}^2 + u_{b1}^2} \approx 0.002 \text{ mm}$$

$$\text{高度 } H \text{ 的总不确定度: } u_H = u_{b2} = 0.01 \text{ mm}$$

（3）计算体积 V 的测量值和不确定度：

$$V = \frac{\pi}{4} \bar{D}^2 H = 5.302 \times 10^2 \text{ mm}^3$$

利用公式（11）得：

$$E_V = \frac{U_V}{V} = \sqrt{\left(\frac{1}{H} \cdot u_H\right)^2 + \left(\frac{2}{\bar{D}} \cdot u_D\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.01}{10.54}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 0.002}{8.003}\right)^2} \approx 0.1\%$$

$$U_V = 5.302 \times 10^2 \times 0.1\% = 0.5032 \text{ mm}^3$$

（4）表示测量结果： $V = (5.302 \pm 0.005) \times 10^2 \text{ mm}^3$

练习题

1. 计算间接测量结果的最佳值和不确定度并表示测量结果。

已知 $A = (53.5 \pm 0.2) \text{ cm}^2$ ， $B = (1.260 \pm 0.001) \text{ cm}^2$ ， $C = (0.535 \pm 0.001) \text{ cm}^2$ ，

$D = (123 \pm 1) \text{ cm}^2$

求解下列几种情况：

(1) $N = 2 \cdot A - B + 3 \cdot C + D$;

(2) $N = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$;

(3) $N = A^2 + \sqrt{C} - D$;

(4) $N = \sqrt{\frac{A \cdot \sqrt{C}}{B \cdot D}}$;

2. 用最小分度值 $0.01mm$ 的千分尺测量钢球的直径为: 8.922、8.913、8.920、8.925、8.915、8.932、8.918、8.924 (单位: mm), 求 A 类不确定度。

3. 千分尺测量圆柱体的直径 $D = (8.560 \pm 0.004) mm$, 求圆柱体底面积 S , 用不确定度表示测量结果。

4. 金属环的体积是环内径 D_1 、外径 D_2 和厚度 h 的函数: $V = \pi h(D_2^2 - D_1^2)/4$, 经直接测量和计算得到各直接测量量: 环内径 $D_1 = (2.880 \pm 0.004) cm$, 外径 $D_2 = (3.600 \pm 0.004) cm$, 厚度 $h = (2.575 \pm 0.004) cm$, 求金属环体积 V , 用不确定度表示测量结果。